

Dans tout le problème, les distances seront exprimées en m et les vitesses en m/h. On désigne par v_1 la vitesse du lapin et v_2 celle du camion.

1. Dans le triangle ABD rectangle en B , on a :

$$AD \cos \theta = AB = 4 \text{ d'où } AD = \frac{4}{\cos \theta} \text{ car } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta > 0$$

$$\text{De même } \tan \theta = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{4} \text{ d'où } BD = 4 \tan \theta.$$

Par conséquent

$$t_1 = \frac{AD}{v_1} = \frac{\frac{4}{\cos \theta}}{30000} = \frac{4}{30000 \cos \theta}$$

$$\text{et comme } B \in [CD], CD = CB + BD \text{ d'où } t_2 = \frac{CD}{v_2} = \frac{CB + BD}{60000} = \frac{7 + 4 \tan \theta}{60000}$$

2. Le lapin traverse avant le passage du camion ssi

$$\begin{aligned} t_1 < t_2 &\iff \frac{4}{30000 \cos \theta} < \frac{7 + 4 \tan \theta}{60000} \\ &\iff \frac{8}{\cos \theta} < 7 + 4 \tan \theta \\ &\iff \frac{4}{\cos \theta} < \frac{7}{2} + 2 \tan \theta \\ &\iff \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta} > 0 \\ &\iff f(\theta) > 0 \end{aligned}$$

3. Étudions les variations de la fonction f : f est dérivable sur $[0; \pi/2[$ et

$$\forall \theta \in [0; \pi/2[, f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2 \theta} - 4 \times \frac{(-\cos'(\theta))}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{4 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$f'(\theta)$ est du signe de $2 - 4 \sin \theta$.

• Résolvons dans $[0; \pi/2[$ l'équation $f'(\theta) = 0$.

$$f'(\theta) = 0 \iff 2 - 4 \sin \theta = 0 \iff \sin \theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{6}$$

• Résolvons dans $[0; \pi/2[$ l'inéquation $f'(\theta) > 0$.

$$f'(\theta) > 0 \iff 2 - 4 \sin \theta > 0 \iff \sin \theta < \frac{1}{2} \iff 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{6}]$ et strictement décroissante

sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}[$. Avec $f(0) = \frac{7}{2} - 4 = -\frac{1}{2}$

$$\text{et } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} - 4 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{7}{2} - \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{7}{2} - 2\sqrt{3} \approx 0,0359$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	
$f'(\theta)$		+	0	-
f			$7/2 - 2\sqrt{3}$	
		\nearrow		\searrow
	$-1/2$			$-\infty$

Application du théorème de la bijection.

• La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{6}]$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet alors de dire que f est bijective de $[0; \frac{\pi}{6}]$ sur l'intervalle image $f\left([0; \frac{\pi}{6}]\right) = [f(0); f(\frac{\pi}{6})] = [-\frac{1}{2}; \frac{7}{2} - 2\sqrt{3}]$

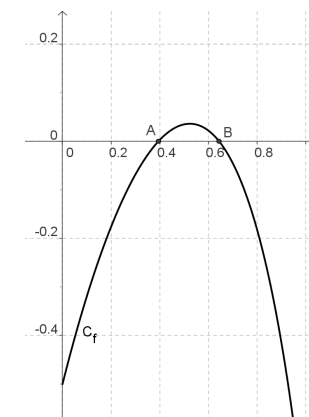
Autrement dit, tout réel de $[-\frac{1}{2}; \frac{7}{2} - 2\sqrt{3}]$ admet un unique antécédent par la fonction f dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{6}]$.

En particulier l'équation $f(\theta) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{6}]$, on notera α cette première solution. $\alpha \approx 0,395$ à 10^{-3} près par excès.

• On écrit $f(\theta)$ sous la forme $f(\theta) = \frac{7}{2} + \frac{2 \sin \theta - 4}{\cos \theta}$. Alors $\lim_{\theta \xrightarrow{+} \frac{\pi}{2}} f(\theta) = -\infty$. On

montre comme précédemment que l'équation $f(\theta) = 0$ admet une seule solution β dans l'intervalle $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}[$. $\beta \approx 0,644$ à 10^{-3} près par excès.

Ainsi $f(\theta) > 0 \iff \alpha < \theta < \beta$.



Le lapin aura la vie sauve ssi l'angle θ mesure entre 22,6 et 36,9 degrés environ.